POLITECHNIKA OPOLSKA

Podstawy dynamiki budowli

Spis zadań

Definicje i cel dynamiki budowli

Definicja i cel przedmiotu

- Dynamika jest działem mechaniki zajmującym się ruchem ciał makroskopowych z uwzględnieniem przyczyn powodujących ruch.
- Dynamika budowli jest nauką o drganiach konstrukcji budowlanych lub ich elementów składowych, takich jak belki, płyty, powłoki, fundamenty pod maszyny, wysokie budynki, mosty, kominy przemysłowe, wieże radiowo-telewizyjne chłodnie kominowe, platformy wiertnicze i inne konstrukcje inżynierskie.
- Cel dynamiki budowli: określenie reakcji (w dynamice budowli nazywanej często odpowiedzią konstrukcji) tj. przemieszczeń i naprężeń dla danego typu konstrukcji budowlanej poddanej działaniu dowolnego obciążenia dynamicznego. (Słowo "dynamiczny" oznacza "zmienny w czasie")

Opis i klasyfikacja obc. dynamicznych zewnętrznych

Obciążenia dynamiczne działające na konstrukcje mogą pochodzić od:

- sił przyrody: obciążenie wiatrem, trzęsienie ziemi, działanie fal wody
- przemysłowej lub technicznej działalności człowieka: ruch pojazdów po mostach, ruch suwnic, w czasie ruchu obrotowego lub posuwisto-zwrotnego elementów części maszyn, od uderzeń podczas pracy młota, od eksplozji materiałów wybuchowych (np. w kamieniołomach), od wstrząsów powodowanych eksploatacją złóż węgla kamiennego lub podczas transportu drogowego i kolejowego.

Obciążenia dynamiczne mogą być zmienne w przestrzeni i czasie $P(\boldsymbol{x}, t)$. Obciążenia zewnętrzne zależne tylko od czasu nazywamy siłami wymuszającymi. Ruchy podłoża, które są funkcją czasu, nazywamy wymuszaniami typu kinematycznego. Siły wymuszające powodujące drgania można podzielić na siły deterministyczne i niedeterministyczne (losowe).

Przykłady obiążeń dynamicznych:

Obciążenie deterministyczne

Siła odśrodkowa spowodowana niewyważeniem wirującej masy. Środek ciężkości masy nie pokrywa się z osią obrotu (mimośród).

$$P_0 = m_w a_n = m_w e p^2 \tag{1}$$

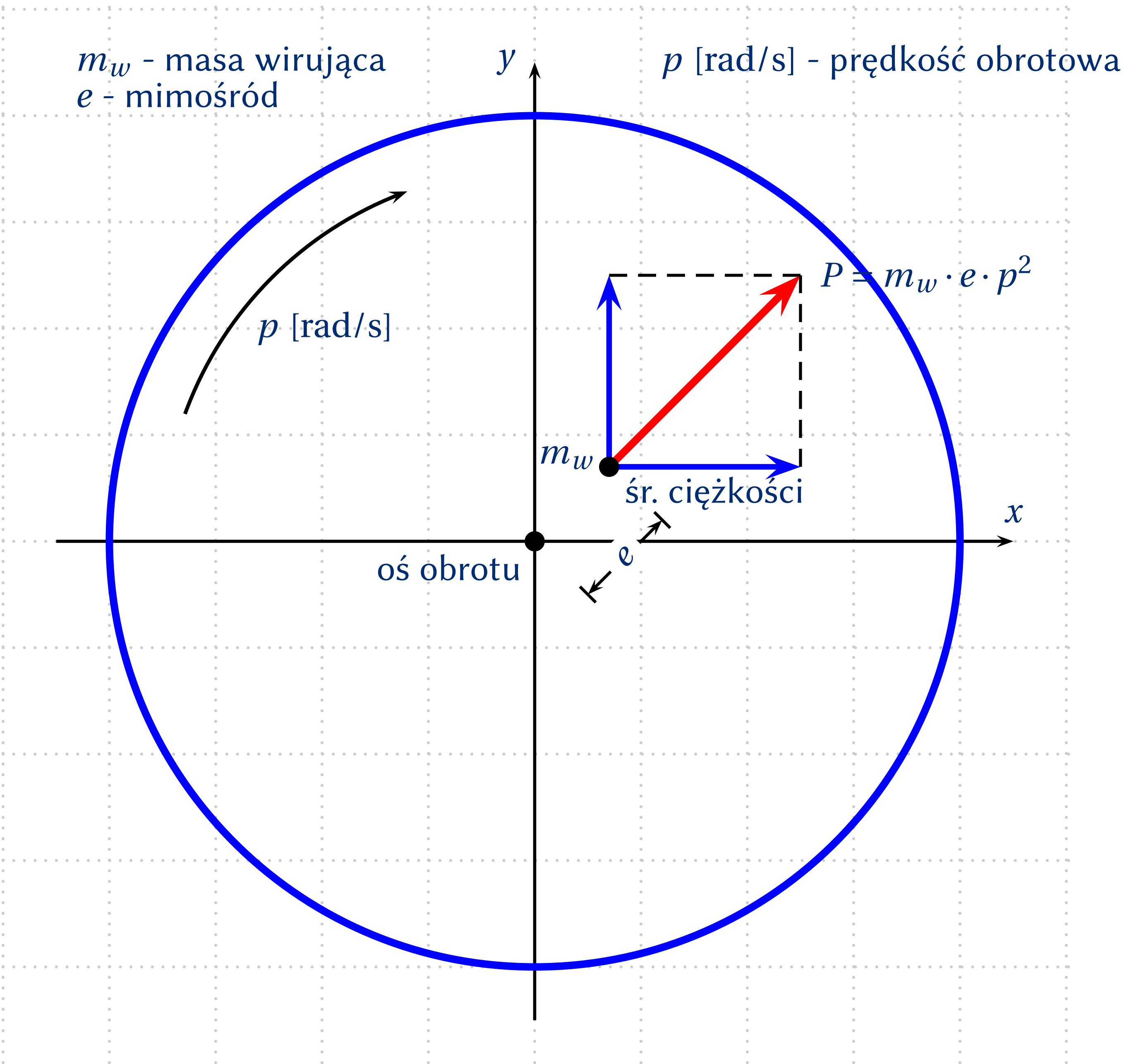
$$P_{x1}(t) = P_0 \cos pt \tag{2}$$

$$P_{x2}(t) = P_0 \sin pt \tag{3}$$

Obciążenie losowe

Siła działania wiatru

Przykładowy wykres realizacji


m_w - masa wirująca
e - mimośród
y
p [rad/s] - prędkość obrotowa
p [rad/s]
$P = m_w \cdot e \cdot p^2$
m_w
śr. ciężkości
x
e
oś obrotu

Tematyka zajęć

Tematyka zajęć

- Przegląd zagadnień dynamiki budowli. Analiza i opis ruchu drgającego.
- Drgania układu o jednym stopniu swobody: równanie ruchu, drgania swobodne, drgania wymuszone harmonicznie, wymuszenie dowolną funkcją czasu, wymuszenie kinematyczne
- Drgania układów o skończonej liczbie stopni swobody: równanie ruchu, zagadnienie własne, drgania wymuszone harmonicznie, metoda superpozycji postaci drgań
- Analiza dynamiczna konstrukcji zp. MES: równania ruchu, macierze bezwładności, tłumienia i sztywności
- Dynamiczna analiza belek i ram płaskich zp. MES
- Drgania prętowych układów ciągłych

Wprowadzenie, Równania różniczkowe

Wprowadzenie, literatura

- Zaliczenia: 1 kolokwium i 1 projekt zaliczeniowy

Wprowadzenie, literatura

- Zaliczenia: 1 kolokwium i 1 projekt zaliczeniowy
- Literatura:
  - Chmielewski T., Zembaty Z., Podstawy dynamiki budowli, Arkady

Dynamika budowli - czym się zajmuje?

- działanie wiatru na smukłe budowle: kominy, wieżowce
- trzęsienia ziemi, wstrząsy górnicze
- kuźnie, tartaki, fundamenty pod maszyny
- mosty, wiadukty, belki podsuwnicowe

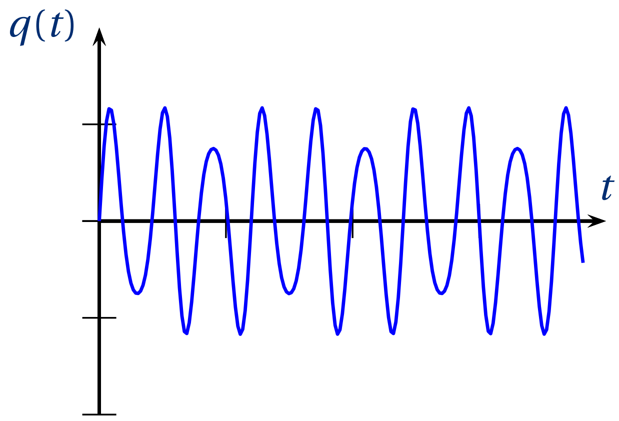
Składanie drgań

Charakterystyka i składanie drgań

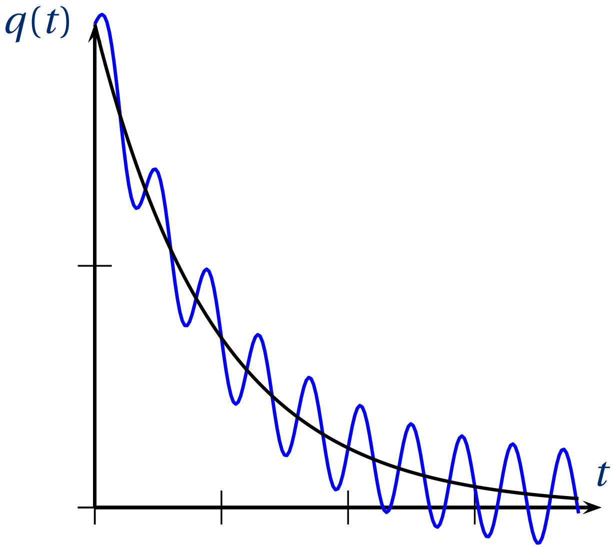
1. Wstęp

Definicja: Ruchem drgającym (oscylującym) punktu względem pewnej wartości przeciętnej nazywamy taki ruch, w którym odchylenia od wartości przeciętnej są ograniczone i w pewnych (niekoniecznie równych) odstępach czasu punkt zbliża się i oddala od tej wartości przeciętnej.

Wartość przeciętna może być stała w czasie; wtedy przyjmujemy ją zwykle za poziom zerowy w danym układzie współrzędnych.



Wartość przeciętna może być również zmienna w czasie.



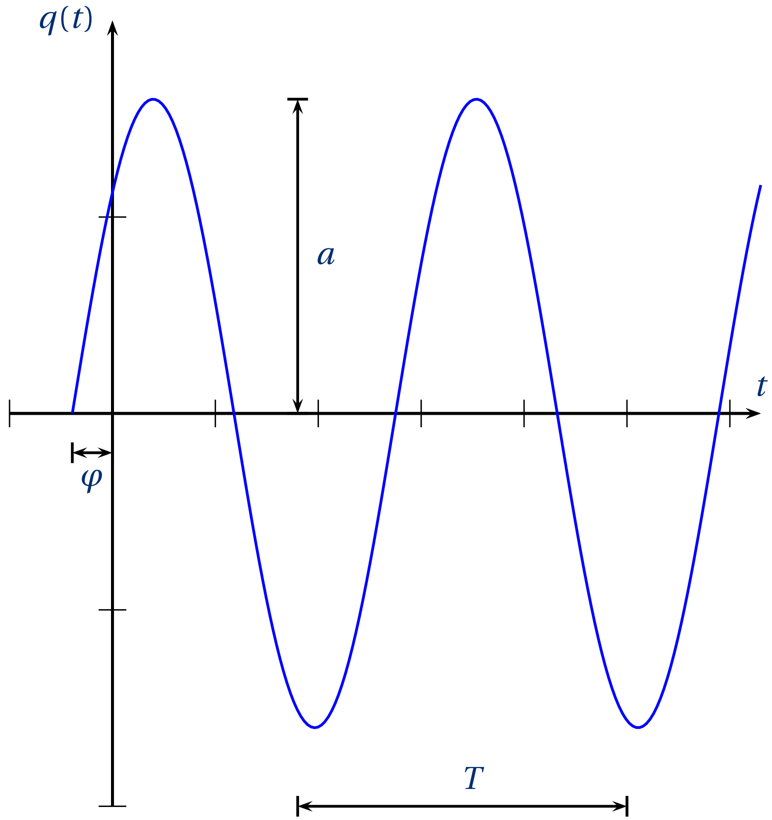
Ruch drgający spełniający warunek

$$q(t) = q(t + nT), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

nazywamy ruchem okresowym (periodycznym) o okresie T. Powtarzający się fragment ruchu zawarty w okresie T nazywamy cyklem (c). Najprostszy przypadek ruchu drgającego okresowego to ruch harmoniczny określony wzorem

$$q(t) = a\sin(\frac{2\pi}{T}t + \varphi) = a\sin(\omega t + \varphi) \tag{5}$$

gdzie : a - amplituda, T - okres [s], $(\omega = 2\pi/T)$ - częstość kołowa [rad/s], $(\omega t + \varphi)$ - faza ruchu [rad], φ - faza początkowa [rad].



Oprócz częstości kołowej używa się również wielkości $f = 1/T$ częstotliwość (frequency) [Hz] lub częstość techniczna $n = 60/T$ [c/min].
Ruch harmoniczny można też zapisać w formie rozwiniętej

$$q(t) = a\cos\varphi\sin(\omega t) + a\sin\varphi\cos(\omega t) = q_s\sin(\omega t) + q_c\cos(\omega t) \tag{6}$$

gdzie

$$q_s = a\cos\varphi, \quad q_c = a\sin\varphi \tag{7}$$

Relacje odwrotne otrzymamy dodając stronami kwadraty i dzieląc stronami równania (7)

$$a = \sqrt{q_s^2 + q_c^2}, \quad \varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{q_c}{q_s} \tag{8}$$

Prędkość i przyspieszenie otrzymamy poprzez różniczkowanie zależności (5) i (6).

$$\dot{q}(t) = a\omega\cos(\omega t + \varphi) = q_s\omega\cos\omega t - q_c\omega\sin\omega t \tag{9}$$

$$\ddot{q}(t) = -a\omega^2\sin(\omega t + \varphi) = -q_s\omega^2\sin\omega t - q_c\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 q(t) \tag{10}$$

2. Składanie drgań harmonicznych

Rozważać będziemy ruch punktu opisany funkcją $q(t)$, który jest sumą ruchów harmonicznych

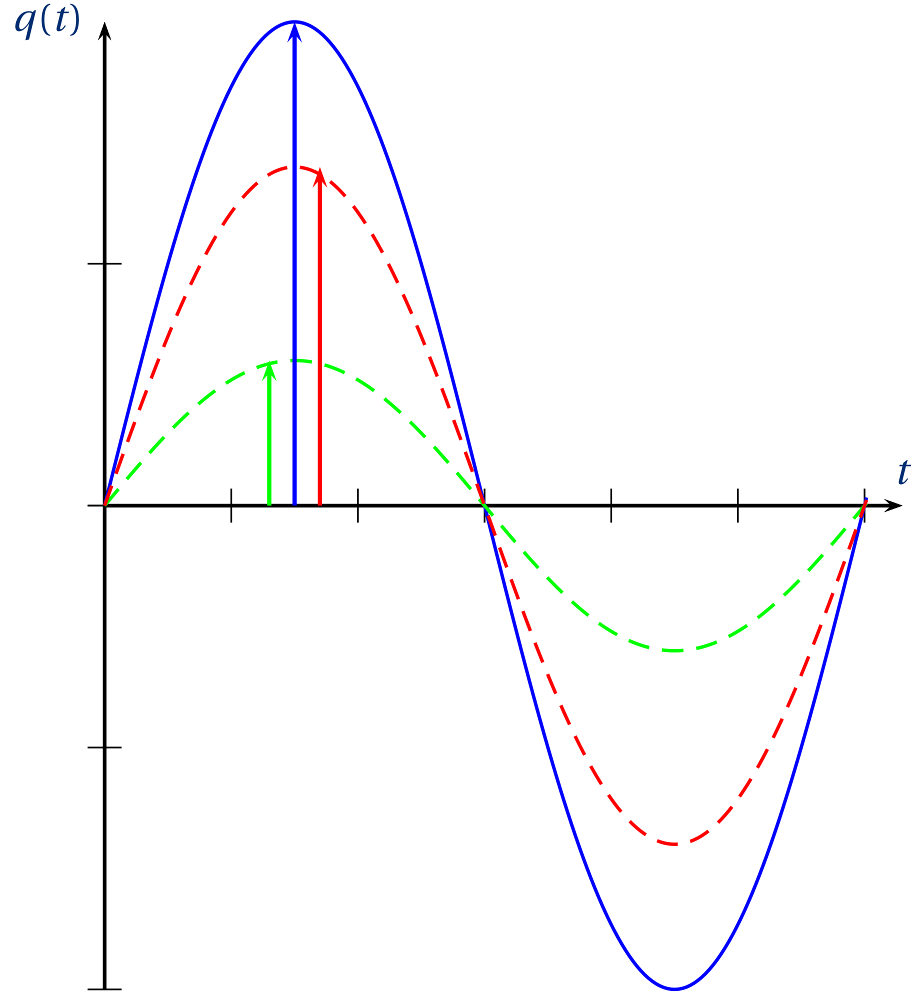
$$q(t) = \sum_j a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \tag{11}$$

a) ruchy składowe są synchroniczne, to znaczy różnią się tylko co do amplitudy

$$\omega_j = \omega = \text{const.}, \quad \varphi_j = \varphi = \text{const.} \tag{12}$$

$$q(t) = \left(\sum_j a_j\right) \sin(\omega t + \varphi) = a \sin(\omega t + \varphi) \tag{13}$$

Amplituda ruchu wypadkowego jest równa sumie amplitud składowych.
Przykład składania dwóch ruchów harmonicznych



b) ruchy składowe mają różne amplitudy i fazy początkowe , a te same częstości

$$q(t) = \sum_j a_j \sin(\omega t + \varphi_j) = \sum_j a_j \cos\varphi_j \sin\omega t + \sum_j a_j \sin\varphi_j \cos\omega t \tag{14}$$

$$q(t) = \left(\sum_j a_j \cos\varphi_j\right) \sin\omega t + \left(\sum_j a_j \sin\varphi_j\right) \cos\omega t \tag{15}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_2 \\ \dots \\ \cos\varphi_n \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} \sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 \\ \dots \\ \sin\varphi_n \end{bmatrix}; \tag{16}$$

Wyrażenia w nawiasach są iloczynami skalarnymi wprowadzonych wektorów.

$$q(t) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{c} \sin\omega t + \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{s} \cos\omega t \tag{17}$$

Otrzymaliśmy zależność w formie rozwiniętej określającą ruch harmoniczny. Stosując wzory dotyczące przejścia od formy rozwiniętej do zwiniętej mamy

$$q(t) = a\sin(\omega t + \varphi) \tag{18}$$

gdzie

$$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c}} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c})^2 + (\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{s})^2} \\ &= \sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{s}\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{s}} \\ &= \sqrt{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{a}} \\ &= \sqrt{\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T)\boldsymbol{a}} \end{aligned} \tag{20}$$

Wyrażenie w nawiasie jest macierzą kwadratową $\boldsymbol{R}$,

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T \tag{21}$$

której elementy określa zależność

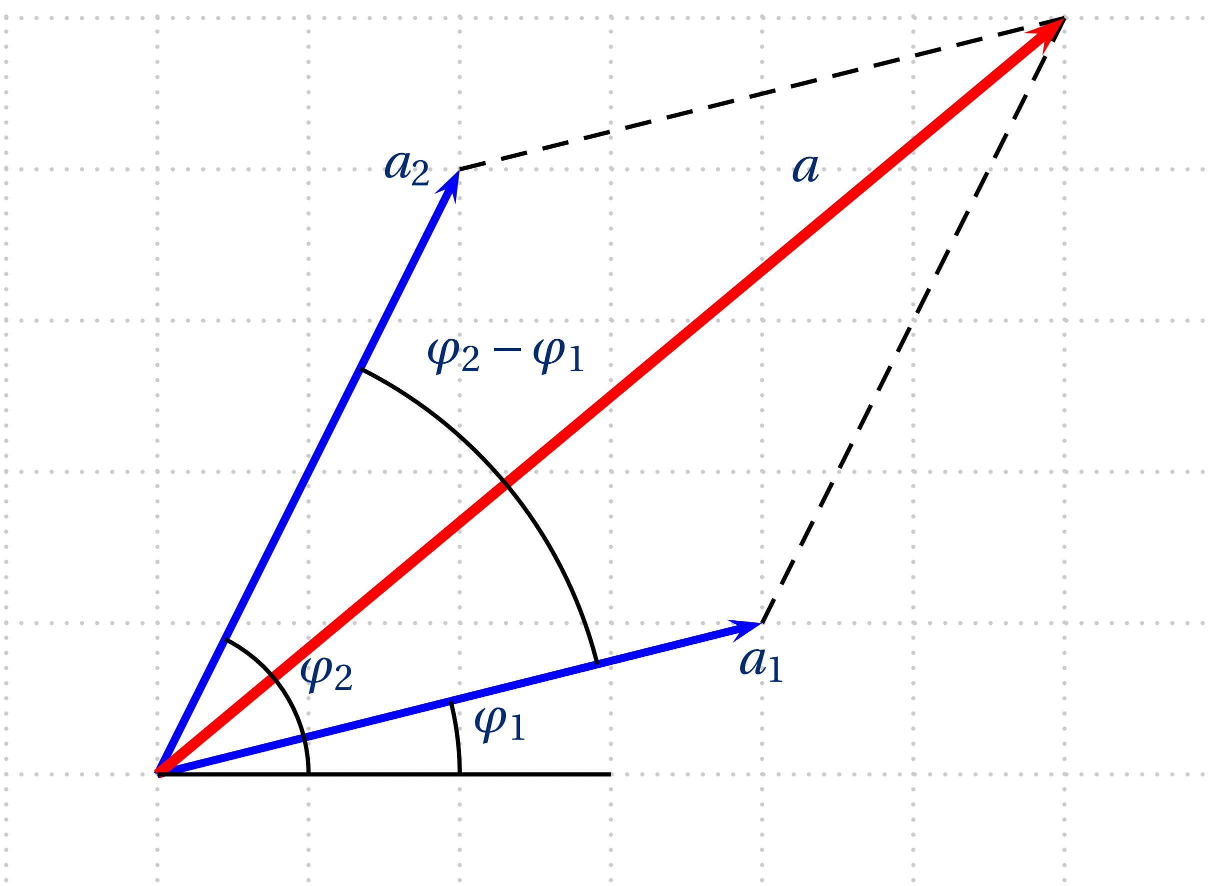
$$R_{ij} = \cos\varphi_i \cos\varphi_j + \sin\varphi_i \sin\varphi_j = \cos(\varphi_i - \varphi_j) \tag{22}$$

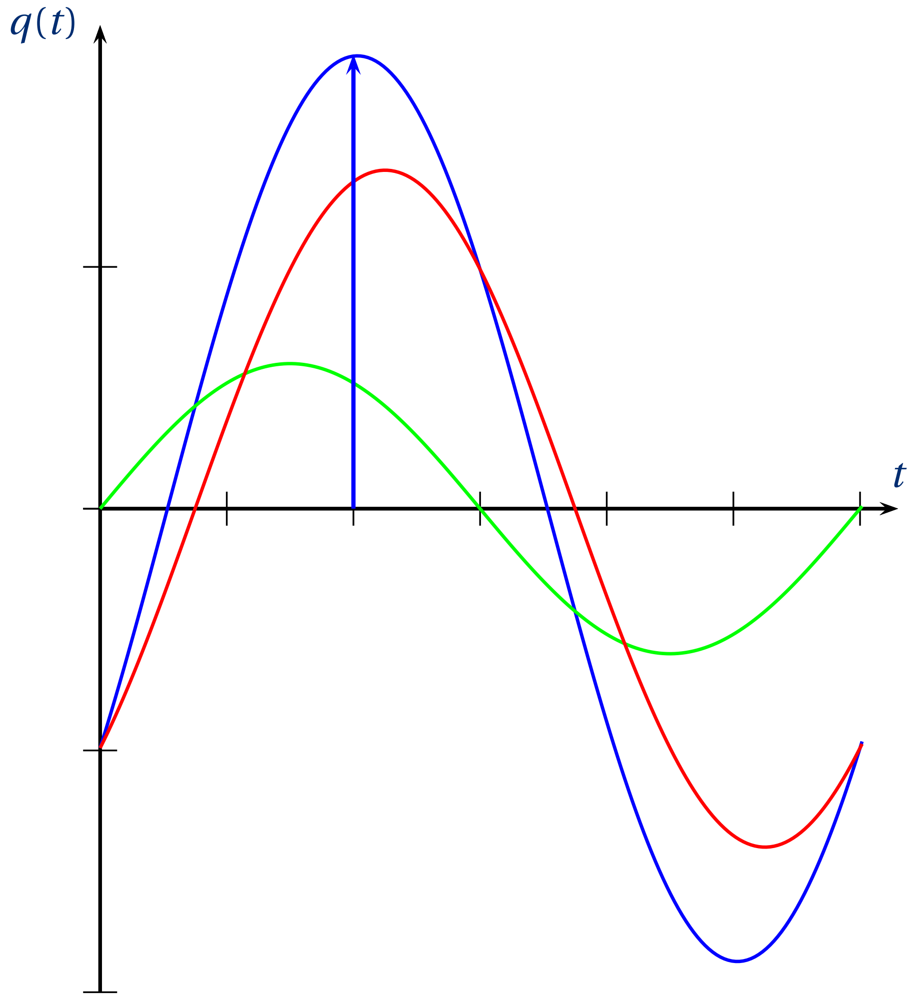
$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{a}} = \sqrt{\sum_i \sum_j a_i a_j R_{ij}} \tag{23}$$

Wyrażenie pod pierwiastkiem jest tak zwaną formą kwadratową , której jądrem jest macierz $\boldsymbol{R}$. Macierz $\boldsymbol{R}$ jest symetryczna i na głównej przekątnej posiada jedynki ($\cos 0 = 1$).

Analiza wzoru na amplitudę złożenia drgań harmonicznych o tych samych częstościach, lecz różnych fazach prowadzi do wzoru, że amplitudy te dodają się jak wektory nachylone pod kątem takim jak różnica faz.
Drganie wypadkowe jest ruchem harmonicznym
Przykład: Składania dwóch ruchów o tej samej częstości, lecz przesunięte w fazie

$$q_1 = a_1 \sin \omega t, \quad q_2 = a_2 \sin(\omega t - \varphi), \quad q = q_1 + q_2 \tag{24}$$




$q(t)$
t

c) Składanie dowolnych drgań harmonicznych

W tym przypadku ruch wypadkowy nie będzie harmoniczny, a będzie co najwyżej ruchem okresowym, jeśli stosunki częstości składowych są wymierne, to znaczy, gdy $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \ldots = n_1 : n_2 : n_3 : \ldots, \frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2} = \ldots = \text{const.}$

Okres T ruchu wypadkowego jest najmniejszą wspólną wielokrotnością okresów składowych. Jeśli w zbiorze częstości składowych pojawią się elementy o proporcjach niewymiernych (np. $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{2}$) to okres drgań wypadkowych osiąga nieskończoność – ruch jest aperiodyczny.

Składanie drgań asynchronicznych najwygodniej jest badać stosując pojęcie obwiedni.
Wprowadźmy do definicji ruchów składowych parametr ε taki, że

$$\begin{aligned} q_j(t) &= a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j + \varepsilon) \\ &= a_j \cos(\omega_j t + \varphi_j) \sin\varepsilon + a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \cos\varepsilon \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} q(t) &= \sum_j a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j + \varepsilon) \\ &= \left[\sum_j a_j \cos(\omega_j t + \varphi_j)\right] \sin\varepsilon + \left[\sum_j a_j \sin(\omega_j t + \varphi_j)\right] \cos\varepsilon \end{aligned} \tag{26}$$

Zapiszmy następujące wektory funkcyjne

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dots \\ \cos(\omega_n t + \varphi_n) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{s}(t) = \begin{bmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dots \\ \sin(\omega_n t + \varphi_n) \end{bmatrix}; \tag{27}$$

oraz wektor amplitud

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{28}$$

Ruch wypadkowy możemy zapisać w postaci

$$q(t) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{c}(t) \cdot \sin\varepsilon + \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{s}(t) \cdot \cos\varepsilon \tag{29}$$

a w postaci zwiniętej

$$q(t) = \hat{q}(t) \sin(\varepsilon + \varphi(t)) \tag{30}$$

gdzie

$$\varphi(t) = \mathrm{tg}^{-1} \frac{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{s}(t)}{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{c}(t)} \tag{31}$$

$$\hat{q}(t) = \sqrt{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{R}(t) \boldsymbol{a}} \tag{32}$$

gdzie

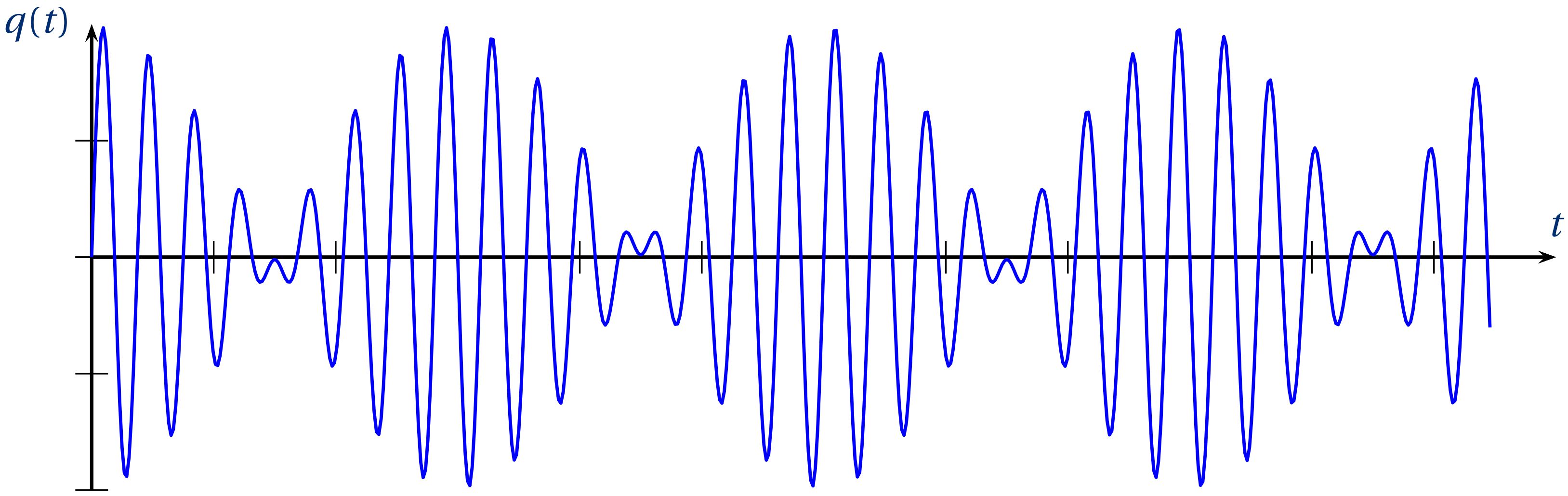
$$R_{ij}(t) = \cos\left[(\omega_i - \omega_j)t + \varphi_i - \varphi_j\right] \tag{33}$$

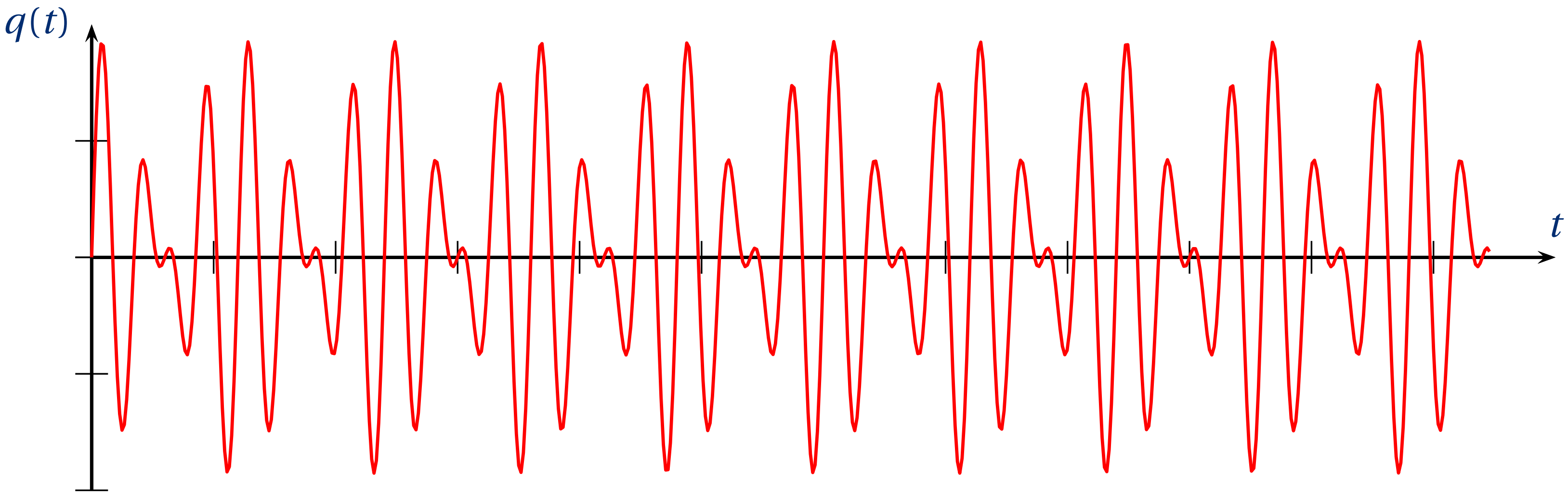
analogicznie jak w poprzednim przypadku.
Przechodząc do granicy przy $\varepsilon \to 0$ otrzymamy

$$q(t) = \hat{q}(t) \sin \varphi(t) \tag{34}$$

Funkcja $\hat{q}(t)$ jest obwiednią ruchu wypadkowego, to znaczy linią styczną do przebiegu wypadkowego. Jeśli ruch wypadkowy jest okresowy to obwiednia również jest okresowa.
Wykres ruchu złożonego jest na ogół funkcją o skomplikowanym przebiegu, dlatego jego analiza może być kłopotliwa. Obwiednia natomiast jest funkcją zawsze nieujemną o stosunkowo łagodnym przebiegu i zawiera istotne informacje o przebiegu amplitudy ruchu złożonego.

Gdy składane są dwa ruchy harmoniczne o zbliżonych częstościach $\omega_1 \approx \omega_2$ i zbliżonych amplitudach $a_1 \approx a_2$ wówczas pojawia się tak zwane zjawisko dudnienia, polegające na okresowym zanikaniu drgań; obwiednia pulsuje bardzo wolno okresowo zbliżając się do zera. Zjawisko to znane jest przy składaniu dwóch dźwięków.
Przykład dudnienia i przykładowy wykres ruchu złożonego i obwiedni.





$$q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n$$